ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΠΟ ΘΕΜΑΤΑ ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΩΝ ΕΤΩΝ ΠΑΓΚΥΠΡΙΑ

Ενότητα 1. Αξιοσημείωτες Ταυτότητες

- $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$
- $(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$
- $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=\alpha^2-\beta^2$
- $(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$
- $(\alpha-\beta)^3=\alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3$

(1) Να βρείτε τα αναπτύγματα:

(α) $(\psi-5)^2=$ (β) $(\chi-9)(\chi+9)=$

(γ) $(\chi+5)^2=$ (δ) $(2x-3)(2x+3)=$

(ε) $(3\chi-5)^2=$ (στ) $(\chi-2)^3=$

(ζ) $(x-4y)^2=$ (η) $(2\omega-3)(2\omega+3)=$

(2) Να δείξετε ότι

(α) $\left(2x^3+\frac{3}{x}\right)^2-\left(2x^3-\frac{3}{x}\right)^2=24x^2$

(β) Αν $2\chi-\psi=5$ να αποδείξετε ότι:

$$(3\chi-2\psi)^2+(3\chi-\psi)(3\chi+\psi)-6\chi^2=75$$

(γ) $\left(x+\frac{2}{x}\right)^2-\left(x-\frac{2}{x}\right)^2=8$

(δ) $(2\kappa+\frac{\lambda}{4})^2-4(\frac{\lambda}{8}-\kappa)(\frac{\lambda}{8}+\kappa)-2\kappa(3\lambda-\kappa)=5\kappa(2\kappa-\lambda)$

Ενότητα 2. Παραγοντοποίηση – Ρητές Αλγεβρικές Παραστάσεις

(1) Να αναλύσετε πλήρως σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τα πολυώνυμα:

(α) $3\alpha+3\beta=$

(β) $\chi^2-16=$

(γ) $\chi^2-10\chi+21=$

(δ) $15\alpha^2\beta-5\beta=$

(ε) $y^2 - 25 =$

(στ) $\kappa^2 - \kappa\lambda + \kappa\mu - \mu\lambda =$

(ζ) $\alpha^3 - \alpha^2 + 9 - 9\alpha =$

(η) $\chi^2 - \alpha^2 - 10\alpha - 25 =$

(θ) $x\psi - 3\psi^2 =$

(ι) $\psi^2 - 36 =$

(κ) $x^3 + 3x + \psi^3 + 3\psi =$

(λ) $x^4 - 5x^2 + 4 =$

(μ) $\chi^3 - 8 - (\chi - 2)^2 + 9(\chi^2 - 4) =$

(2) Να λύσετε τις εξισώσεις:

(α) $\chi^2(3\chi - 5) + 2\chi(5 - 3\chi) + 3\chi - 5 = 0$

(β) $(\chi - 3)(2\chi + 5) = 0$

(γ) $4\psi^2 - 12\psi = -8$

(δ) $2\chi^2 + 4\chi = 0$

(ε) $\chi(\chi - 10) + 21 = 0$

(στ) $(2 + \chi)(\chi - 7) = 0$

(ζ) $\chi^2 - 25 = 0$

(η) $\chi^2 - 3\chi = 0$

(θ) $5\chi(\chi - 1) = 4\chi^2 - 6$

(ι) $3\chi^2 - 2\chi - 1 = 0$

(ια) $2\chi^2 + 7\chi - 15 = 0$

(3) Να απλοποιήσετε τα κλάσματα:

α) $\dfrac{2\chi^2\psi^4}{6\chi^3\psi} =$

β) $\dfrac{\chi^3 - 9\chi}{\chi^2 + 5\chi + 6} =$

(4) Να κάνετε τις πράξεις :

(α) $\dfrac{3\chi + 6}{\chi^2 - 6\chi + 9} \cdot \dfrac{\chi^2 - 9}{\chi^2 - 4} =$

(β) $\dfrac{\alpha^4 - \alpha^2}{\alpha - 1} \div \left(\alpha^3 + \alpha^2\right) =$

(γ) $\dfrac{9}{x^2 + x - 2} - \dfrac{3}{x - 1} =$

(δ) $\dfrac{5\chi-10}{\chi+2}\cdot\dfrac{\chi^2+4\chi+4}{\chi^2-4}=$

(ε) $\left(\dfrac{2}{\chi-3}-\dfrac{1}{\chi}\right)\div\dfrac{\chi^3}{\chi^3-3\chi^2}=$

(στ) $\left(\dfrac{\chi+5}{\chi^2-\chi-6}+\dfrac{2}{\chi+2}\right):\dfrac{3\chi-1}{\chi^3+3\chi^2-9\chi-27}=$

(5) Να λύσετε τις εξισώσεις :

(α) $\dfrac{x-2}{x-3}-\dfrac{3}{x}=\dfrac{3}{x^2-3x}$

(β) $\dfrac{3\chi^2-95}{\chi^2-25}-\dfrac{3}{5-\chi}=\dfrac{2}{\chi+5}+2$

(γ) $\dfrac{2}{\chi-3}+\dfrac{\chi}{2\chi-4}=\dfrac{2}{\chi^2-5\chi+6}$

(6) Να μετατρέψετε τα πιο κάτω σύνθετα κλάσματα σε απλό:

(α) $\dfrac{\chi+6+\dfrac{5}{\chi}}{\chi-\dfrac{25}{\chi}}=$

(β) **Αν** $A=\dfrac{\dfrac{1}{x-4}+\dfrac{4}{x^2-4x}}{\dfrac{2x-2}{x-4}-1}$ **να δείξετε ότι** $A=\dfrac{x+4}{x^2+2x}$ **και στη συνέχεια να**

λύσετε την εξίσωση: $\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{2}{x^2-4}=A$

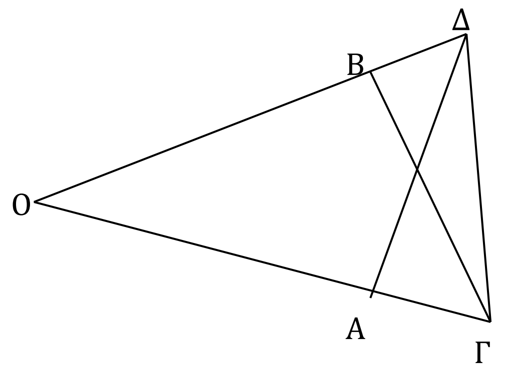
Ενότητα 3. Γεωμετρία

(1) Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) φέρουμε ευθεία ε παράλληλη προς τη ΒΓ που περνά από τα μέσα Δ και Ε των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι οι κορυφές Β και Γ ισαπέχουν από την ευθεία ε.

(2) Στο διπλανό σχήμα είναι ΟΑ = ΟΒ ,

ΓΒ ⊥ ΟΔ και ΔΑ ⊥ ΟΓ.

Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΟΓΔ είναι ισοσκελές



(3) Στο μέσο Μ ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ φέρνουμε ευθεία ε **μη κάθετη.** Από τα σημεία Α, Β φέρνουμε κάθετες προς την ευθεία ε δηλ. ΑΓ ⊥ ε και ΒΔ ⊥ ε. Να δείξετε ότι ΑΓ = ΒΔ.

(4) Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) να προεκτείνετε τη βάση ΒΓ προς το μέρος του Β και του Γ κατά τμήματα ΒΖ και ΓΗ αντίστοιχα έτσι ώστε ΒΖ=ΓΗ. Πάνω στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ να πάρετε σημεία Δ και Ε αντίστοιχα έτσι ώστε ΑΔ=ΑΕ. Να δείξετε ότι:

α) ΒΔΖ = ΕΓΗ

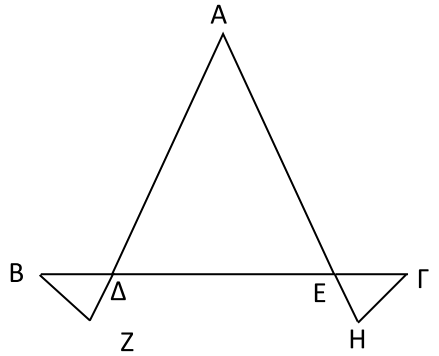
β) Οι αποστάσεις των σημείων Δ και Ε από τη βάση ΒΓ είναι ίσες

(5) Δίνεται τυχαίο τρίγωνο ΑΒΓ. Στις πλευρές ΑΓ και ΒΓ παίρνουμε τμήματα ΓΔ και ΓΕ αντιστοίχως έτσι ώστε ΓΔ=ΓΕ. Αν Ζ τυχαίο σημείο της διχοτόμου ΓΗ, να αποδείξετε ότι:

(α) ΖΔ=ΖΕ

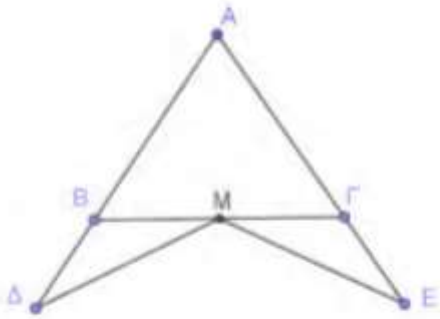
(β) οι αποστάσεις του Ζ από τις πλευρές ΑΓ και ΒΓ είναι ίσες.

(6) Στο πιο κάτω σχήμα ΑΔ = ΑΕ και ΒΔ=ΓΕ και ΔΖ=ΕΗ. Να αποδείξετε ότι ΒΖ = ΓΗ



(7) Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ). Από τα μέσα Δ και Ε των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα , φέρουμε ΔΖ και ΕΗ κάθετες στην βάση ΒΓ. Να δείξετε ότι ΔΖ = ΕΗ.

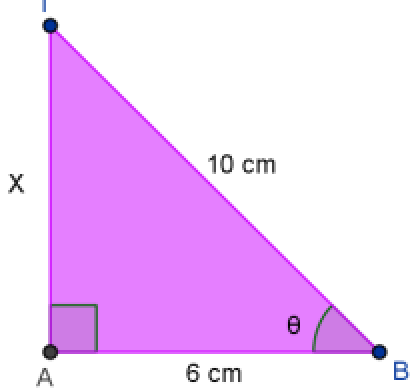
(8) Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ΑΒ=ΑΓ. Το Μ είναι μέσο του ΒΓ. Στις προεκτάσεις των πλευρών ΑΒ προς το Β και ΑΓ προς το Γ, παίρνω ευθύγραμμα τμήματα ΒΔ και ΓΕ αντίστοιχα, τέτοια ώστε ΒΔ=ΓΕ. Να δείξετε ότι ΜΔ=ΜΕ.



Ενότητα 4. Τριγωνομετρία

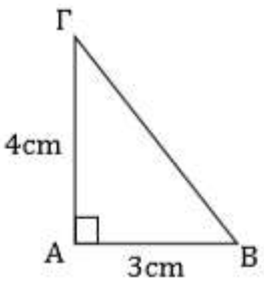
(1) Δίνεται το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ.
Να βρείτε:
α) τους τριγωνομετρικούς αριθμούς ημίτονο, συνημίτονο και εφαπτόμενη της γωνίας θ και

β) την αριθμητική τιμή της παράστασης $A = \dfrac{5ημθ + 3εφθ}{10συνθ}$.



(2) Στο πιο κάτω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\widehat{A} = 90°$), ΑΒ = 3 cm και ΑΓ = 4 cm.

Να υπολογίσετε τους πιο κάτω τριγωνομετρικούς αριθμούς:



ημΒ =

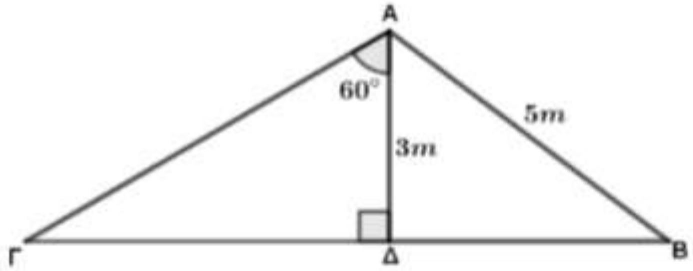
συνΒ =

εφΓ =

(3) Στο τρίγωνο $ΑΒΓ$, το οποίο παρουσιάζεται πιο κάτω, να βρείτε:

(α) Τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας B.

(β) Το μήκος του $ΑΓ$.



(4) Το συγκρότημα που φαίνεται στην εικόνα βρίσκεται στην Λεμεσό. Είναι το ψηλότερο κτίριο στην Κύπρο. Όταν οι ακτίνες του ήλιου πέφτουν υπό γωνία 60ο, όπως φαίνεται στο σχήμα, η σκιά του (ΑΒ) έχει μήκος 100m. Να βρείτε το ύψος (ΑΓ) του κτιρίου αυτού.

(Δίνονται $ημ60°=0{,}866$ $συν60°=0{,}5$ $και$ $εφ60°=1{,}732$)

Ενότητα 5. Ευθεία – Γραμμικά συστήματα

(1) Οι ευθείες ε1: $\psi = (\alpha^2 - 3\alpha)\chi + 8$ και ε2: $\psi = -2\chi + 5$ είναι παράλληλες. βρείτε τις τιμές του α.

(2) Αν οι ευθείες $(2\kappa+1)\chi + 3\psi = 5 \quad \kappa\alpha\iota \quad \psi = -5\chi + 3$ είναι παράλληλες, να βρείτε το κ.

(3) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνά από το σημείο Α(3, 2) και είναι κάθετη προς την ευθεία $3\chi + \psi = -3$

(4) Για ποιες τιμές του μ και κ, οι ευθείες ε1 : ψ + (μ-8)χ=3κ-4 και ε2 : ψ=(3μ+4)χ+5κ ταυτίζονται

(5) Δίνονται τα σημεία Α(4,4), Β(2,1) και Γ(5,-1)

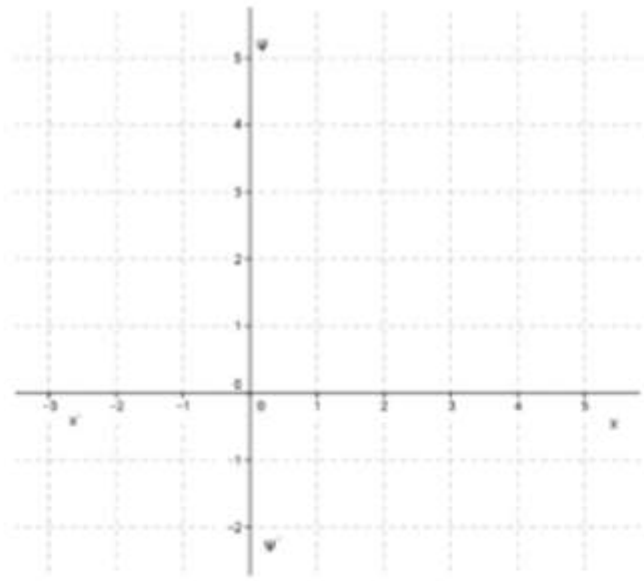
α) Να βρείτε την εξίσωση ευθείας που περνά από το σημείο Β και είναι παράλληλη με την ευθεία ΑΓ.

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.

γ) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είνα ισοσκελές.

δ) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου Μ του ευθυγράμμου τμήματος ΑΓ.

ε) Να βρείτε την εξίσωση της διαμέσου ΒΜ του τριγώνου ΑΒΓ.



(6) Αν Α (2,2), Β (3,5) και Γ (5,1) είναι κορυφές τριγώνου ΑΒΓ, να βρείτε:

α) Το μέτρο της γωνιάς Α.

β) Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

γ) Την εξίσωση της διαμέσου ΒΜ.

(7) Δίνεται τρίγωνο με κορυφές Α(2 , – 4), Β(–1, 5), Γ(3, 1). Να βρείτε:

(α) την εξίσωση του ύψους ΓΔ

(β) το μήκος της διαμέσου ΑΜ.

(8) Να λύσετε τα συστήματα:

(α) $\chi + 3\psi = 7$
$4\chi - \psi = 2$

(β) $-3\chi + \psi = 11$
$4\chi + 3\psi = 7$

(γ) $\dfrac{2\chi + \psi}{3} - \dfrac{\chi - 4\psi}{2} = 2$
$5(\chi + \psi) - 3(\psi - 2) = 7(\chi + \psi) + 5$

(δ) $3\chi + 4\psi - 7$
$2\chi - \psi = 12$

(ε) $2(\chi - 1) - 5(\psi + 5) = -30$
$\dfrac{\psi + 2}{4} - \dfrac{\chi - 3}{3} = \dfrac{1}{4}$