

# ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ - ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ' ΤΑΞΗΣ

## ΕΝΟΤΗΤΑ 1: ΑΞΙΟΣΗΜΕΙΩΤΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

$$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta$$

$$(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta$$

$$(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \alpha^2 - \beta^2$$

$$(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$$

$$(\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$$

1) Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α)  $(x - 3)^2 =$

β)  $(2x + \omega)^2 =$

γ)  $(2\psi - 5)^3 =$

δ)  $(x + 2)(x - 2) =$

ε)  $(x + \omega^2)^3 =$

στ)  $(-5x^3 - 2\psi)^2 =$

ζ)  $(3x + \frac{3}{x})^2 =$

η)  $(x + \frac{4\psi}{x})^2 =$

θ)  $(-3x\psi + 2x^2\psi^3)^3 =$

ι)  $(5x + 3\omega)(3\omega - 5x) =$

κ)  $(2x - \frac{3}{x})^2 =$

λ)  $(x+2\alpha)(x^2+4\alpha^2)(x-2\alpha) =$

2) Να κάνετε τις πράξεις και μετά να βρείτε την αριθμητική τιμή του αποτελέσματος για  $x = -2$ .

$$(2x + 1)^3 - 2x(3x + 1)(3x - 1) - (3x - 2)^2 =$$

3) Αν  $x = \frac{1}{\psi}$ , να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$A = (5x - \psi)^2 - (5x - 3)(5x + 3) + 4\psi - (\psi + 2)^2 =$$

4) Δίνονται τα πολυώνυμα:  $P(x) = x^2 + 2x + 3$  και  $Q(x) = 2x - 1$ .

α) Να βρείτε το  $P(\alpha - 1)$ .

β) Να αποδείξετε ότι:  $P(\alpha - 1) + Q(\alpha) = (\alpha + 1)^2$

5) Δίνεται το πολυώνυμο  $P(x) = -2x^2 + 2x + 80$ .

α) Να βρείτε το  $P(x - 1)$

β) Να αποδείξετε ότι  $P(x) - P(x - 1) = 4 - 4x$

γ) Να υπολογίσετε το  $P(100) - P(99)$

6) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης  $(3\alpha + \beta)^2 - (3\alpha - \beta)^2$ , αν  $\alpha\beta = 8$

7) Αν  $\alpha + \beta = 6$  και  $\alpha\beta = 3$  να δείξετε ότι  $\alpha^2 + \beta^2 = 30$ .

8) Να αποδείξετε τις πιο κάτω ταυτότητες:

α)  $(\alpha + \beta)^2 - (\alpha - \beta)^2 = 4\alpha\beta$

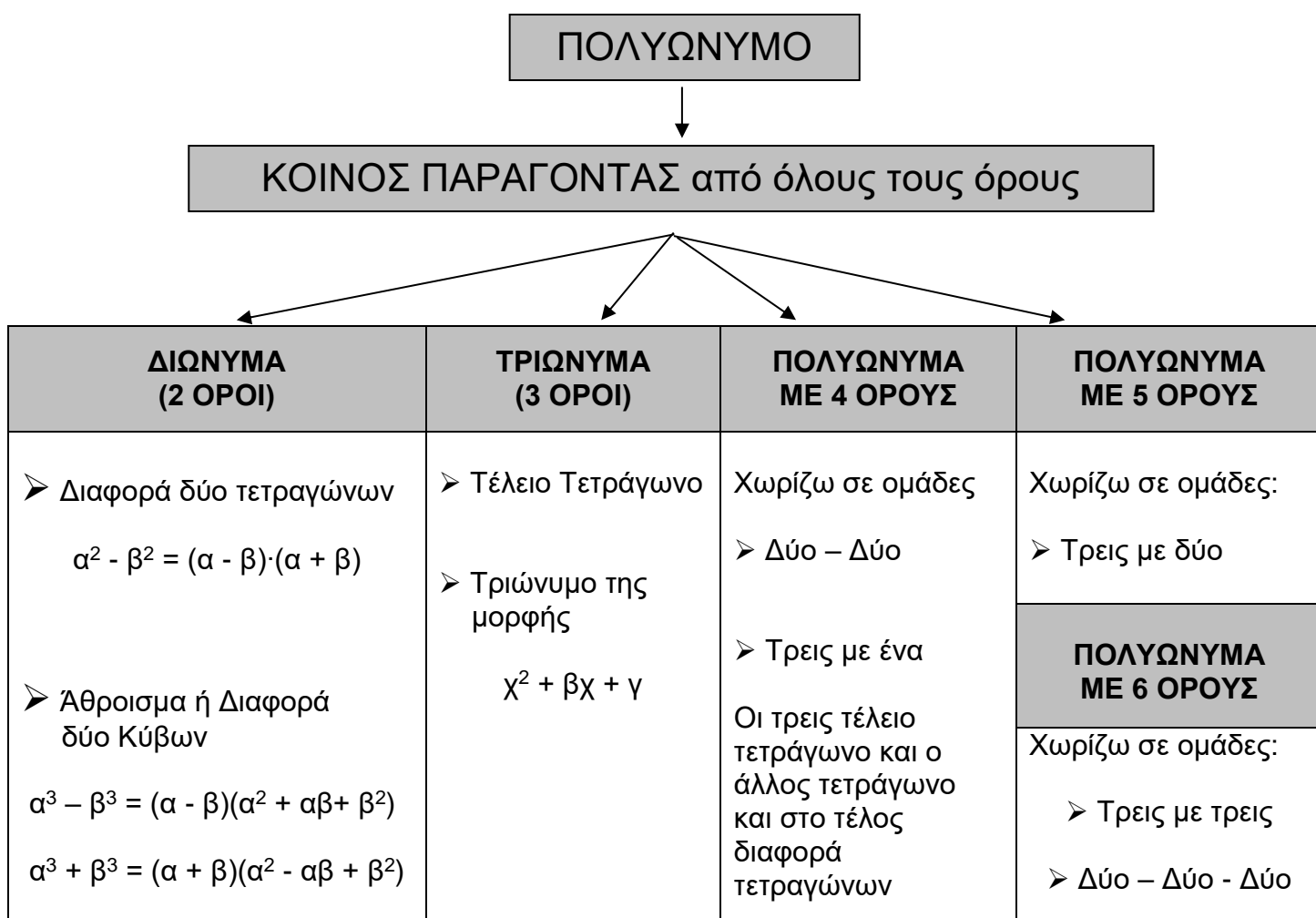
β)  $(3\alpha + 2\beta)^2 - 5(\alpha - 2\beta)(\alpha + 2\beta) - 3\beta(8\alpha + 5\beta) = (2\alpha - 3\beta)^2$

γ)  $(x - \frac{2}{x})^2 - (x + \frac{2}{x})^2 = -8$

δ)  $(\frac{3\alpha + \beta}{2})^2 - (\frac{3\alpha - \beta}{2})^2 = 3\alpha\beta$

ε)  $(x - \frac{1}{2})(x + \frac{1}{2}) - (x + \frac{1}{2})^2 = -\frac{2x+1}{2}$

## ΕΝΟΤΗΤΑ 2: ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ - ΡΗΤΕΣ ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ



A) Να αναλύσετε πλήρως σε γινόμενο παραγόντων τα πολυώνυμα.

1)  $x^3 + 7x^2 =$

2)  $5x\psi^3 + 15x^2\psi - 10x\psi =$

3)  $4a^2 - 9 =$

4)  $\beta^3 - 8 =$

5)  $\psi^2 - 6\psi + 8 =$

6)  $9x^2 + 12x + 4 =$

7)  $x^2 - 4x - 12 =$

8)  $x^3 + 27\psi^3 =$

9)  $\alpha x + \alpha\psi + 3x + 3\psi =$

10) $\alpha^4 + \alpha =$	11) $7\alpha^3 - 28\alpha$	12) $\chi^3 + 8\chi^2 - 9\chi =$
13) $(2\chi - 1)^2 - \psi^2 =$	14) $\alpha^2 - \beta^2 - 4\alpha + 4\beta =$	15) $\chi^2(\chi - 3) + 4(3 - \chi) =$
16) $-\chi^2 + 2\chi + 8 =$	17) $\chi^5 - \chi =$	18) $\alpha^2 - 5\alpha - \beta\alpha + 5\beta =$
19) $4\chi^2 - 4\chi + 1 - \psi^2$	20) $\chi^2 - 4\chi + 3 - \alpha\chi + \alpha =$	21) $9\chi^2 - 6\chi + 1 =$
22) $4\chi^2 - 25\psi^2 =$	23) $\kappa\alpha - \kappa\beta + \lambda\alpha - \lambda\beta =$	24) $\alpha^2 + 6\alpha - 27 =$
25) $4\alpha^4\beta^3 - 6\alpha^3\beta^5 =$	26) $\omega^3 - \omega =$	27) $\chi^2 - \psi^2 - 5\chi + 5\psi =$
28) $\chi^3 + 10\chi^2 + 9\chi =$	29) $5\alpha(\beta - \gamma) - \beta + \gamma =$	30) $8\chi^3 - 1 =$
31) $2\alpha^3 - 8\alpha =$	32) $\psi^2 + 5\psi - 6 =$	33) $3\chi^4 - 3\chi =$
34) $4\chi^2 - 12\chi + 9 =$	35) $\alpha(\omega - \chi) - 3\beta(\chi - \omega) =$	36) $(\alpha + 3)^2 - 16 =$
37) $-3\chi^3 - 12\chi^2 + 15\chi =$	38) $\chi^2 - 4\chi - \psi^2 + 4 =$	
39) $16\alpha^4 - \beta^4 =$	40) $\chi^2 - 6\chi + 5 + \beta\chi - 5\beta =$	

B) 2) Να απλοποιήσετε τα πιο κάτω κλάσματα:

α) $\frac{15\chi^3\psi^4}{9\chi\psi^8} =$	β) $\frac{-9x^4\psi^3\omega}{-3\chi^2\psi^2\omega} =$	γ) $\frac{5\chi^2 - 10\chi}{\chi^2 - 3\chi + 2} =$	δ) $\frac{x^2 + x - 12}{2x^2 + 8x} =$
ε) $\frac{\chi^2 - 25}{2\chi - 10} =$	στ) $\frac{5\alpha^2\beta - 5\alpha\beta^2}{\alpha^3\beta - \alpha\beta^3} =$	ζ) $\frac{\chi^2 - 4}{\chi^2 + 3\chi - 10} =$	η) $\frac{5\chi^4 - 5\chi}{10\chi^2\psi - 10\chi\psi} =$
θ) $\frac{\alpha\beta - 2\alpha - 3\beta + 6}{\alpha^2 - 2\alpha - 3} =$			

3) Να κάνετε τις πράξεις:

α) $\frac{3}{\chi\psi} - \frac{2}{\chi\omega} =$	β) $\frac{2}{\chi - 5} + \frac{2}{2\chi + 10} =$
γ) $\frac{4xa}{w} \cdot \frac{xw}{a^2} \cdot \frac{w^2}{8x^3} =$	δ) $\frac{\chi^2 + \chi - 2}{4 - \chi^2} \cdot \frac{2\chi - 4}{\chi^2 - 1} =$
ε) $\frac{\chi^2 - 4\chi - 5}{\chi^3 - \chi} : \frac{\chi^2 - 25}{7\chi} =$	στ) $\frac{x}{x^2 + 2x} - \frac{2}{2 - x} - \frac{4x}{x^2 - 4} =$
ζ) $\frac{1}{2\chi^2} + \frac{5}{\chi} - \frac{2}{6\chi} =$	η) $\frac{4}{\chi^2 - 4} - \frac{2}{\chi^2 + 2\chi} + \frac{1}{\chi - 2} =$
θ) $\frac{2\chi}{\chi^2 - 25} + \frac{1}{5 - \chi} - \frac{3}{\chi^2 + 5\chi} =$	ι) $\frac{\chi\psi^2}{\chi^2 + 3\chi - 18} \cdot \frac{4\chi + 24}{\chi\psi} =$

$$\kappa) \frac{\chi^2 - 8\chi + 12}{\chi^2 - 36} : \frac{3\chi - 6}{\chi^2 + 5\chi - 6} =$$

$$\lambda) \frac{8\chi^3 - 1}{3\chi + 2} : \frac{4\chi^2 + 2\chi + 1}{9\chi^2 + 12\chi + 4} =$$

$$\mu) \frac{\chi^2 + 2\chi - 3}{9 - \chi^2} \cdot \frac{2\chi - 6}{\chi^2 - 1} =$$

$$\nu) \frac{x^2 - 3x - 4}{x^3 - x} : \frac{x^2 - 16}{5x} =$$

$$\xi) \left( \frac{1}{\chi - 3} - \frac{1}{\chi^2 - 5\chi + 6} \right) : \frac{\chi^2}{\chi^2 - 2\chi} =$$

$$\pi) \left( \frac{\chi}{\chi^2 + 2\chi} + \frac{2}{2 - \chi} + \frac{4\chi}{\chi^2 - 4} \right) : \frac{3}{\chi^2 + 3\chi + 2} =$$

$$\rho) \frac{3\chi^2 - 3}{\chi^3 + \chi^2 - 2\chi} : \left( \frac{3}{\chi^2 - 4} + \frac{1}{\chi + 2} \right) =$$

4) Να κάνετε απλά τα σύνθετα κλάσματα:

$$\alpha) \frac{\frac{5\chi}{4\chi^2 - 25}}{\frac{\chi}{\chi - 5}} =$$

$$\beta) \frac{1 + \frac{9}{\chi^2 - 9}}{\chi + \frac{\chi}{\chi - 3}} =$$

$$\gamma) \frac{x - \frac{9}{x}}{x - 5 + \frac{6}{x}} =$$

$$\delta) \frac{\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\beta}{\alpha}}{\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} - 2} =$$

$$\epsilon) \frac{\frac{\chi^2 - 16}{\chi^2 + 3\chi - 4}}{\frac{\chi^2 - 4\chi}{\chi^2}} =$$

$$\sigma\tau) \frac{\alpha + \frac{4\alpha}{\alpha - 4}}{1 + \frac{16}{\alpha^2 - 16}} =$$

## **Β) ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 2<sup>ου</sup> ή ανωτέρου βαθμού**

1) Επίλυση εξισώσεων 2<sup>ου</sup> βαθμού  $a\chi^2 + b\chi + \gamma = 0$

$$\chi_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}$$

2) Επίλυση εξισώσεων ανωτέρου βαθμού

- ♦ Μεταφέρω όλους τους όρους της εξίσωσης στο α' μέλος και κάνω το β' μέλος = 0
- ♦ Αναλύω το α' μέλος της εξίσωσης σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.
- ♦ Παίρνω το κάθε παράγοντα ίσο με 0 και βρίσκω τις λύσεις της εξίσωσης.

1) Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις:

$$\alpha) (\chi - 1) \cdot (\chi - 2) = 0$$

$$\beta) (7\chi - 2) \cdot (\chi - 5) = 0$$

$$\gamma) \chi^2 - 5\chi - 6 = 0$$

$$\delta) \chi^3 = 25\chi$$

$$\epsilon) \chi^2 - 4\chi = -4$$

$$\sigma\tau) \chi \cdot (\chi + 1) = 12$$

$$\zeta) (\chi - 3)^2 - (\chi + 4)^2 = 25$$

$$\eta) \chi^3 - 6\chi^2 = 9\chi$$

$$\theta) (\chi + 2) \cdot (\chi + 3) = 20$$

$$\text{ι) } 2x^2 - x - 3 = 0$$

$$\text{κ) } 9x^2 - 6x + 1 = 0$$

$$\text{λ) } 2x^2 + 4x + 3 = 0$$

$$\text{μ) } 2x^2 + 8 = 0$$

$$\text{ν) } \psi(\psi + 6) = -9$$

$$\text{ξ) } x^2 - 3x = 0$$

$$\text{ο) } x^2 - 4x = 12$$

$$\text{π) } x^2 - 8x = 0$$

$$\text{ρ) } x^2 - 64 = 0$$

$$\text{σ) } (x-5)(x^2 - 2x - 3)(2x-5) = 0$$

$$\text{τ) } 25\psi^2 - 20\psi + 4 = 0$$

$$\text{υ) } x^2 = 2x + 15$$

$$\text{φ) } 3a^2 + 4a - 7 = 0$$

$$\text{χ) } 3x(x-1) = 2x^2 - 2$$

2) Να λύσετε τις κλασματικές εξισώσεις:

$$\text{Α) } \frac{1}{a} + \frac{2}{4-a^2} = \frac{1}{a-2}$$

$$\text{Β) } \frac{x}{3-x} - 1 + \frac{7}{3+x} = \frac{28}{9-x^2}$$

$$\text{Γ) } \frac{x-1}{x^2-4} + \frac{5}{x^2+2x} = \frac{1}{x-2}$$

$$\text{Δ) } \frac{2\alpha}{\alpha^2+\alpha} = 1 - \frac{2}{\alpha+1}$$

$$\text{Ε) } \frac{x-2}{x} + \frac{4}{x-2} = \frac{8}{x^2-2x}$$

$$\text{ΣΤ) } \frac{\psi+2}{\psi} = \frac{\psi+3}{\psi+4} - \frac{4}{\psi^2+4\psi}$$

$$\text{Ζ) } \frac{3}{\omega^2-3\omega-4} = \frac{2\omega+5}{\omega^3+2\omega^2+\omega} + \frac{4}{\omega^2-4\omega}$$

$$\text{Η) } \frac{3}{\psi+5} - \frac{\psi}{\psi-5} = \frac{\psi^2+25}{25-\psi^2}$$

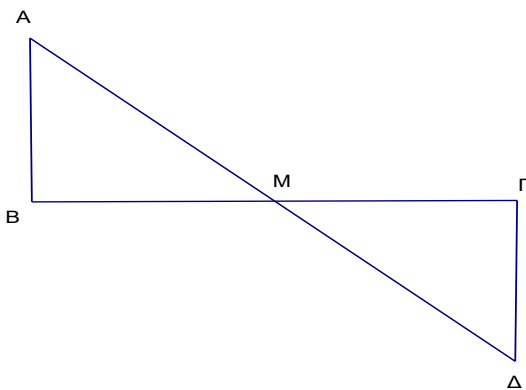
3) Το άθροισμα των τετραγώνων δύο διαδοχικών άρτιων φυσικών αριθμών είναι 100. Να βρείτε τους αριθμούς αυτούς.

4) Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει μήκος 8cm και πλάτος 4cm. Αν αυξήσουμε και το μήκος και το πλάτος κατά  $x$ , το εμβαδόν του θα αυξηθεί κατά  $28\text{cm}^2$ . Να βρείτε το  $x$ .

### ΕΝΟΤΗΤΑ 3: ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

1) Το ΑΒΓ ισοσκελές τρίγωνο ( $AB = AG$ ). Φέρουμε την διάμεσο ΑΜ. Από τυχόν σημείο Ε της διαμέσου ΑΜ φέρουμε τις αποστάσεις ΕΔ και ΕΖ πάνω στις ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι: α)  $DE = EZ$  β) το τρίγωνο ΒΕΓ είναι ισοσκελές

2)



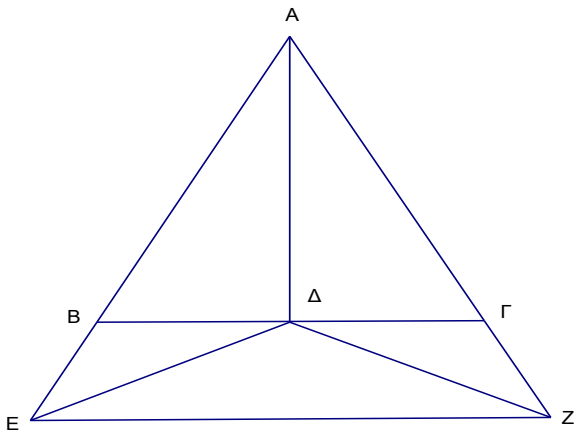
Δεδομένα	Ζητούμενα
M μέσο ΒΓ	$AB = ΓΔ$
M μέσο ΑΔ	$AB // ΓΔ$

3) Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ( $AB = AG$ ). Να δείξετε ότι τα ύψη ΒΔ και ΓΕ είναι ίσα.

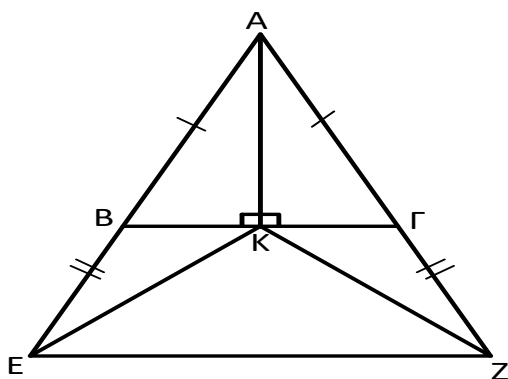
4) Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ( $AB = AG$ ). Να δείξετε ότι οι διχοτόμοι ΒΔ και ΓΕ είναι ίσα.

5) Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ( $AB = AG$ ). Να δείξετε ότι οι διάμεσοι ΒΔ και ΓΕ είναι ίσα.

- 6) Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ).  $A\delta$  είναι  $\Delta$  και  $E$  τα μέσα των πλευρών  $AB$  και  $A\Gamma$  αντίστοιχα. Πάνω στις προεκτάσεις της  $B\Gamma$  προς  $B$  και  $\Gamma$  παίρνουμε τμήματα  $BZ = \Gamma P$ . Να δείξετε ότι τα τρίγωνα  $B\Delta P$  και  $\Gamma E Z$  είναι ίσα.
- 7) Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = B\Gamma$ ). Να προεκτείνετε την βάση  $A\Gamma$  προς το  $A$  και  $\Gamma$  κατά ίσα τμήματα  $A\Delta = \Gamma E$ . Να δείξετε ότι τα σημεία  $\Delta$  και  $E$  απέχουν ίση απόσταση από τις πλευρές  $AB$  και  $B\Gamma$  αντίστοιχα.
- 8) Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB = A\Gamma$  και η διχοτόμος  $A\Delta$ . Να φέρετε τις αποστάσεις  $\Delta E$  και  $\Delta Z$  του σημείου  $\Delta$  από τις πλευρές  $AB$  και  $A\Gamma$  αντιστοίχως. Να δείξετε ότι:  
 α)  $\Delta E = \Delta Z$  και  
 β) Το τρίγωνο  $A E Z$  είναι ισοσκελές.
- 9) Στο πιο κάτω σχήμα  $AB = A\Gamma$ ,  $A\Delta$  διχοτόμος και  $BE = \Gamma Z$ . Να δείξετε ότι:  
 α)  $E\Delta Z$  ισοσκελές τρίγωνο.  
 β) Οι αποστάσεις των  $E$  και  $Z$  από την  $B\Gamma$  είναι ίσες.



10)



ΔΕΔΟΜΕΝΑ	ΖΗΤΟΥΜΕΝΟ
$AB\Gamma$ ισοσκελές τρίγωνο ( $AB=A\Gamma$ ) $BE = \Gamma Z$ $AK \perp B\Gamma$	$KEZ$ ισοσκελές

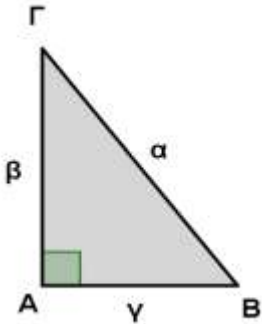
- 11) Σε ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ),  $\Delta$  και  $E$  είναι σημεία των πλευρών  $AB$  και  $A\Gamma$  αντίστοιχα έτσι ώστε  $A\Delta = AE$ . Αν  $Z$  είναι το μέσο της  $B\Gamma$  να δείξετε ότι:  
 α.  $\Delta Z = EZ$   
 β. Οι αποστάσεις των σημείων  $\Delta$  και  $E$  από τις πλευρές  $A\Gamma$  και  $AB$  αντίστοιχα είναι ίσες.
- 12) Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ).  $\Delta$  είναι το μέσο της  $AB$  και  $E$  το μέσο της  $A\Gamma$ . Από τα  $\Delta$  και  $E$  φέρουμε τις αποστάσεις  $\Delta Z$  και  $E H$  πάνω στη  $B\Gamma$ . Να δείξετε ότι:  
 α)  $\Delta Z = E H$       β) Το τρίγωνο  $A Z H$  είναι ισοσκελές

- 13) Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ( ΑΒ = ΑΓ ). Προεκτείνουμε τη βάση ΒΓ προς το Β και Γ κατά τμήματα ΒΔ = ΓΕ. Να αποδείξετε ότι: α) Το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές και β) Τα σημεία Β και Γ απέχουν ίσες αποστάσεις από τις πλευρές ΑΔ και ΑΕ αντίστοιχα. (Σχήμα – Δεδομένα - Ζητούμενα)

- 14) Δίνεται τυχαίο τρίγωνο ΑΒΓ. Στις πλευρές ΑΒ και ΒΓ παίρνουμε δύο σημεία Δ και Ε αντίστοιχα ώστε ΒΔ=ΒΕ. Αν Ζ τυχόν σημείο της διχοτόμου ΒΗ να δείξετε ότι ΖΔ=ΖΕ.

## ΕΝΟΤΗΤΑ 4: ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

### ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟ ΘΕΩΡΗΜΑ

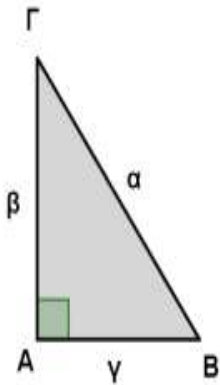


$$(\text{Υποτείνουσα})^2 = (\text{κάθετος 1})^2 + (\text{κάθετος 2})^2$$

$$(ΒΓ)^2 = (ΑΒ)^2 + (ΑΓ)^2$$

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$$

Τριγωνομετρικοί αριθμοί οξείας γωνίας ορθογωνίου τριγώνου



ημίτινο της  $\hat{B}$  = .....

ημ  $\hat{B}$  = .....

συνημίτινο της  $\hat{B}$  = .....

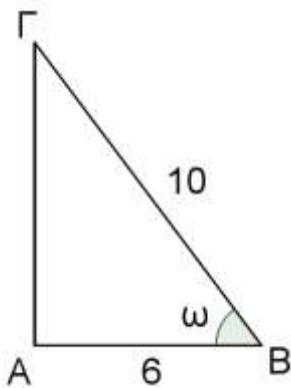
συν  $\hat{B}$  = .....

εφαπτομένη της  $\hat{B}$  = .....

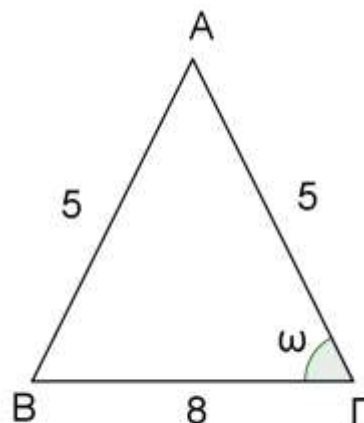
εφ  $\hat{B}$  = .....

1) Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω στα πιο κάτω σχήματα.

α)

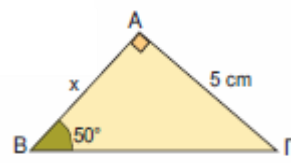
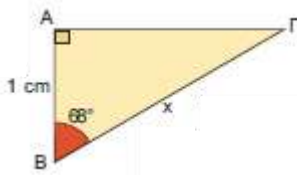
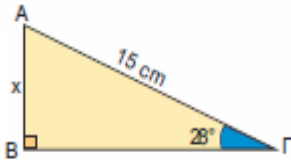


β)

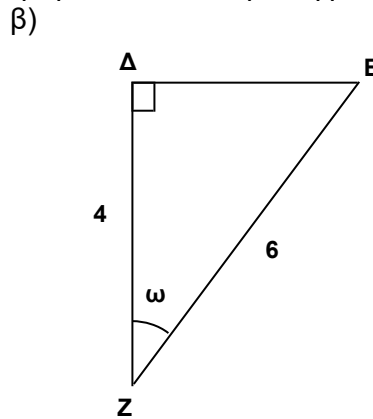
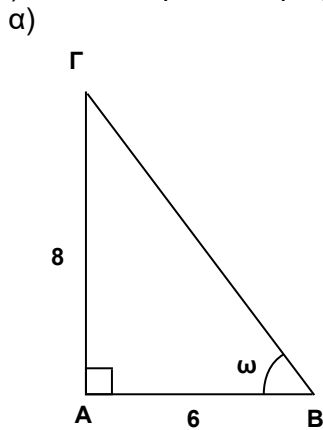


2) Σε ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) και  $\eta\mu B = \frac{6}{10}$ . Να υπολογίσετε τους Τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας  $\Gamma$ .

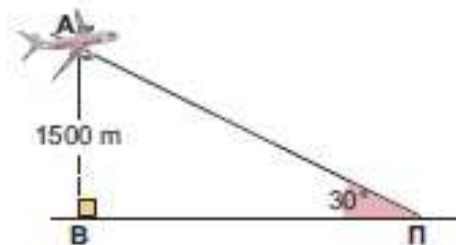
3) Να υπολογίσετε το  $x$  σε καθένα από τα παρακάτω τρίγωνα:



4) Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας  $\omega$ . Η απάντηση να δοθεί σε προσέγγιση ακεραίου.



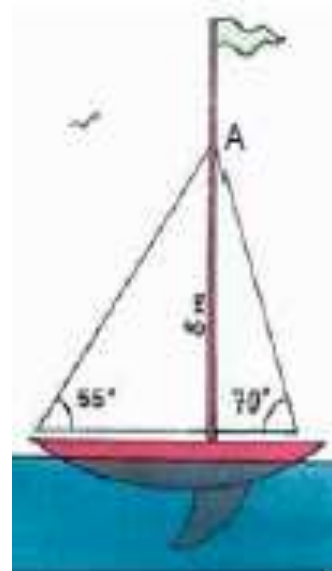
5) Ένα αεροπλάνο A πετά σε ύψος 1500m και φαίνεται από τον πύργο ελέγχου του αεροδρομίου με γωνία  $30^\circ$ . Ποια είναι η οριζόντια απόσταση ΠΒ από τον πύργο ελέγχου;



6) Σ' ένα ιστιοπλοϊκό σκάφος το ύψος του καταρτιού έως το σημείο A είναι 8 m. Να βρείτε το μήκος που έχουν τα συρματόσχοινα που στηρίζουν τα πανιά, αν αυτά σχηματίζουν γωνίες  $55^\circ$  και  $70^\circ$  αντίστοιχα με το επίπεδο της θάλασσας

$$\eta\mu 55^\circ \cong 0,82 \quad \sigma\upsilon\nu 55^\circ \cong 0,57 \quad \epsilon\phi 55^\circ \cong 1,43$$

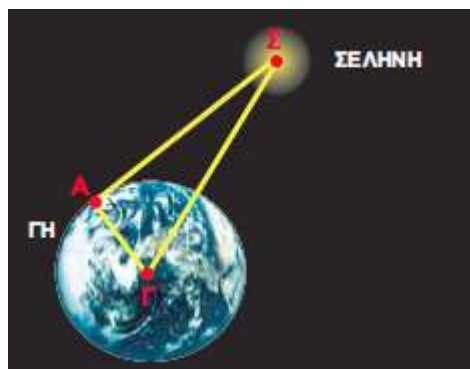
$$\eta\mu 70^\circ \cong 0,94 \quad \sigma\upsilon\nu 70^\circ \cong 0,34 \quad \epsilon\phi 70^\circ \cong 2,75$$





7) Η ακτίνα της Γης είναι  $R=ΓΑ=6371$  km και η γωνία  $ΑΓΣ$  είναι  $89^\circ$ . Να υπολογίσετε με τη βοήθεια του διπλανού σχήματος την απόσταση Γης - Σελήνης (ΓΣ).

$$\eta\mu 89^\circ \cong 1 \quad \sigma\upsilon\nu 89^\circ \cong 0,02 \quad \epsilon\phi 89^\circ \cong 57,3$$



## ΕΝΟΤΗΤΑ 5: ΕΥΘΕΙΑ - ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

A) Απόσταση δύο σημείων

$$A(\chi_1, \psi_1)$$

$$B(\chi_2, \psi_2)$$

$$AB = \sqrt{(\psi_2 - \psi_1)^2 + (\chi_2 - \chi_1)^2}$$

B) Μέσο ευθύγραμμου τμήματος (δύο σημείων)

$$A(\chi_1, \psi_1)$$

$$B(\chi_2, \psi_2)$$

$$\chi_M = \frac{\chi_1 + \chi_2}{2}$$

$$\psi_M = \frac{\psi_1 + \psi_2}{2}$$

Γ) ΚΛΙΣΗ ΕΥΘΕΙΑΣ

1) ΑΝ ΔΙΝΕΤΑΙ Η ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΤΗΣ

$$A(\chi_1, \psi_1)$$

$$B(\chi_2, \psi_2)$$

$$\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

2) ΑΝ ΔΙΝΕΤΑΙ Ο ΤΥΠΟΣ ΤΗΣ

ΤΥΠΟΣ ΕΥΘΕΙΑΣ	ΚΛΙΣΗ
$\psi = \alpha\chi + \beta$ ή $\psi = \alpha\chi$	$\lambda = \alpha$
$\psi = \beta$	$\lambda = 0$
$\chi = \kappa$	Δεν ορίζεται
$A\chi + B\psi + \Gamma = 0$	$\lambda = -\frac{A}{B}$

Δ) Σχετικές θέσεις δύο ευθειών: Έστω οι ευθείες:  $\epsilon_1: \psi = \lambda_1\chi + \beta_1$   $\epsilon_2: \psi = \lambda_2\chi + \beta_2$

1) Τεμνόμενες Ευθείες

$$\lambda_1 \neq \lambda_2 \Leftrightarrow \epsilon_1, \epsilon_2 \text{ τέμνονται}$$

3) Ευθείες που συμπίπτουν (ταυτίζονται)

$$\epsilon_1, \epsilon_2 \text{ συμπίπτουν} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 \text{ και } \beta_1 = \beta_2$$

2) Παράλληλες Ευθείες

$$\epsilon_1 // \epsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 \text{ και } \beta_1 \neq \beta_2$$

4) Κάθετες Ευθείες

$$\epsilon_1, \epsilon_2 \text{ κάθετες} \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$$

Αν δύο ευθείες τέμνονται τότε η ΛΥΣΗ του συστήματος τους μας δίνει τις συντεταγμένες του ΣΗΜΕΙΟΥ ΤΟΜΗΣ τους.

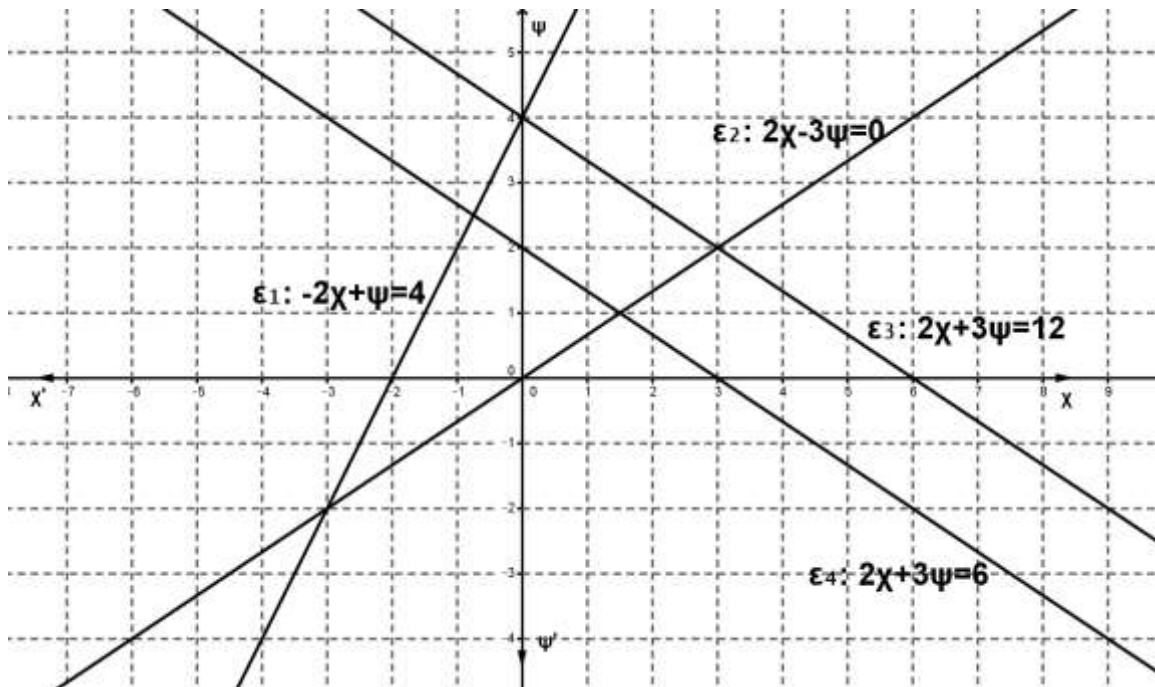
1) Να βρείτε τις αποστάσεις των σημείων Α και Β, το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ και τη κλίση του στις πιο κάτω περιπτώσεις:

- α) Α(3, 5) και Β(7, 10)                      β) Α(-3, 1) και Β(-1, 0)

2) Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές Α(2, 2), Β(4, 4) και Γ(5, -1)

- Α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.  
 Β) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που είναι παράλληλη με την ευθεία  $\epsilon: \psi = 2\chi + 5$  και περνά από το σημείο Γ  
 Γ) Να βρεθεί η εξίσωση της διαμέσου ΒΔ.

3) Στο πιο κάτω ορθογώνιο σύστημα αξόνων δίνονται οι γραφικές παραστάσεις τεσσάρων εξισώσεων ευθειών. Να εξετάσετε αν τα ακόλουθα συστήματα εξισώσεων έχουν λύση ή όχι και να βρείτε τη λύση ή λύσεις (αν υπάρχουν) σε καθένα από αυτά.



- α)  $\epsilon_4: 2\chi + 3\psi = 6$                       β)  $\epsilon_2: 2\chi - 3\psi = 0$                       γ)  $\epsilon_3: 2\chi + 3\psi = 12$   
 $\epsilon_3: 2\chi + 3\psi = 12$                        $\epsilon_1: -2\chi + \psi = 4$                        $\epsilon_1: -2\chi + \psi = 4$

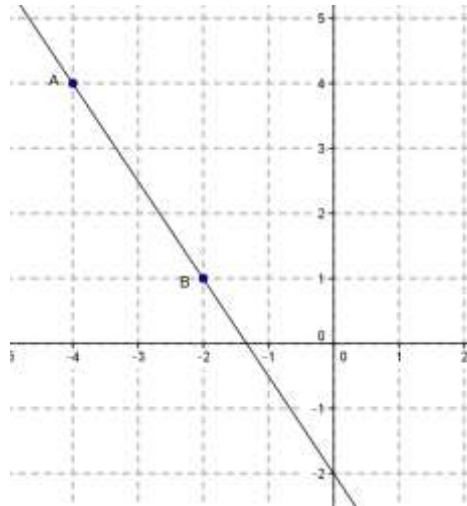
4) Να βρείτε τη κλίση των πιο κάτω ευθειών:

- α)  $\psi = 3\chi - 1$                       β)  $\psi = -\chi$                       γ)  $\psi = 5$                       δ)  $\chi = -4$   
 ε)  $\psi = 1 - \frac{\chi}{4}$                       στ)  $\psi = \frac{1}{3}\chi - 11$                       ζ)  $2\psi = 4\chi - 8$                       η)  $3\psi - \chi = 1$

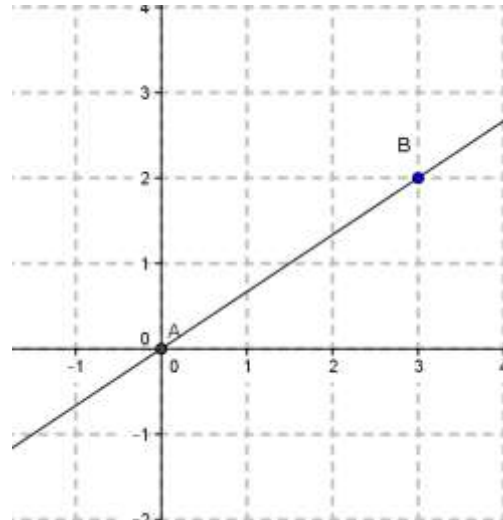
5) Να βρείτε: Α) τη κλίση.

Β) Την εξίσωση της ευθείας

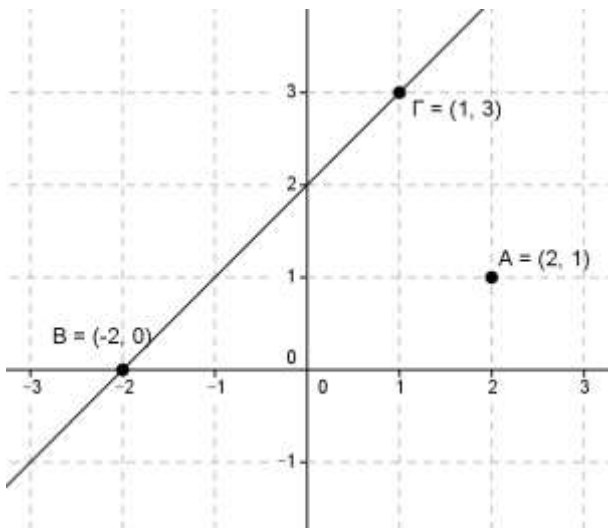
Α)



Β)



Γ)



6) Να βρείτε τη σχετική θέση των πιο κάτω ευθειών:

Α)  $\epsilon_1: 3\chi - 6\psi = 4$

Β)  $\epsilon_1: \psi = 4 - \frac{1}{2}\chi$

$\epsilon_2: -3\chi + 6\psi = 8$

$\epsilon_2: 2\chi + 4\psi - 8 = 0$

Γ)  $\epsilon_1: \psi = 4$

Δ)  $\epsilon_1: \chi = -1$

$\epsilon_2: \psi = -1$

$\epsilon_2: \chi = 7$

7) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνά από το σημείο Α και είναι παράλληλη με την ευθεία  $\epsilon_1$  στις πιο κάτω περιπτώσεις.

Α)  $A(0, 0)$

Β)  $A(-2, 4)$

$\epsilon_1: \chi + 2\psi = 4$

$\epsilon_1: 6\chi - 4\psi = 5$

- 8) Αν η ευθεία  $\psi = (\alpha - 1)\chi + 7$  είναι παράλληλη με την ευθεία  $2\chi - \psi = -3$  να βρείτε το  $\alpha$ .
- 9) Να βρείτε την τιμή του  $\alpha$  ώστε οι ευθείες  $(\alpha - 2)\chi + 3\psi = 1$  και  $\psi = -\frac{2}{3}\chi$  να είναι παράλληλες.
- 10) Να βρείτε τη τιμή του  $\alpha$ , ώστε η ευθεία  $y = (\alpha - 1)\chi - 3$  να είναι παράλληλη με την ευθεία  $\chi + 2\psi = 1$ .
- 11) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που:
- διέρχεται από το σημείο  $A(2, -3)$  και έχει κλίση  $\lambda=4$
  - διέρχεται από τα σημεία  $B(6, -1)$  και  $\Gamma(3, 2)$
  - περνά από το σημείο  $\Delta(3, -6)$  και είναι παράλληλη με την ευθεία  $3\chi - \psi = 5$
  - περνά από το σημείο  $E(-2, 1)$  και από το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος των σημείων  $A$  και  $B$ .
- 12) Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με κορυφές  $A(-2, 1)$ ,  $B(4, -3)$  και  $\Gamma(3, 2)$
- Να δείξετε ότι το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισοσκελές
  - Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκάθετης της πλευράς  $AG$
  - Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$
- 13) Να λυθούν τα συστήματα: (Μέθοδο αντίθετων συντελεστών ή μέθοδο αντικατάστασης)
- |   |  |
|---|--|
| A) $3\chi + 2\psi = 3$<br>$\chi - 4\psi = -13$                  | B) $2\chi + \psi = 1$<br>$3\chi - 2\psi = -16$                                       |
| Γ) $\psi - \chi + 2(2\chi - \psi) = 4$                          | Δ) $\frac{\chi - 1}{5} - \frac{\psi + 5}{2} = -3$<br>$3(\psi + 2) - 4(\chi - 3) = 3$ |
| $\frac{\psi + \chi}{3} - \frac{2\psi - \chi}{2} = -\frac{5}{6}$ |  |
| E) $\chi - \psi = 9$<br>$\chi + \psi = 13$                      | Z) $3\chi - \psi = 12$<br>$2\chi + 3\psi = 19$                                       |
|   | H) $2\alpha - 3\beta = -6$<br>$\alpha - 2\beta = -5$                                 |
|   | Θ) $3\phi + 5\omega = 50$<br>$4\phi + 3\omega = 41$                                  |
| I) $4(\chi - 3) - 3\psi = -18$<br>$2\chi - 3(4\psi + 2) = 12$   |  |
- 14) Σε μία αυλή υπάρχουν κόττες, κουνέλια και ένας σκύλος. Πόσα είναι τα κουνέλια και πόσες οι κόττες αν έχουν συνολικά 21 κεφάλια και 56 πόδια.
- 15) Στη θεατρική παράσταση του Γυμνασίου Νεάπολης, παρευρέθηκαν 200 άτομα, ενήλικες και παιδιά. Το εισιτήριο εισόδου για τους ενήλικες στοίχιζε €4 ενώ για τα παιδιά €3. Αν συνολικά εισπράχθηκαν €780, να βρείτε με τη χρήση συστήματος, πόσοι ενήλικες και πόσα παιδιά παρακολούθησαν την παράσταση;
- 16) Ο Κώστας αγόρασε 2 κιλά μήλα και 3 κιλά πορτοκάλια και πλήρωσε € 3,45. Ο Αντρέας αγόρασε 3 κιλά μήλα και 2 κιλά πορτοκάλια και πλήρωσε €4,30 . Πόσα το κιλό είναι τα μήλα και πόσα τα πορτοκάλια;
- 17) Σ'ένα τηλεοπτικό παιχνίδι σε κάθε παίκτη υποβάλλονται 10 ερωτήσεις. Για κάθε σωστή απάντηση προστίθενται βαθμοί ενώ για κάθε λανθασμένη απάντηση αφαιρούνται βαθμοί. Ένας παίκτης έδωσε 7 σωστές απαντήσεις και συγκέντρωσε 64 βαθμούς, ενώ ένας άλλος έδωσε 4 σωστές απαντήσεις και συγκέντρωσε 28 βαθμούς. Πόσους βαθμούς παίρνει ένας παίκτης για κάθε σωστή απάντηση και πόσοι βαθμοί του αφαιρούνται για κάθε λανθασμένη απάντηση;

18) Σε μια κατασκήνωση υπάρχουν 260 παιδιά, τα οποία μένουν σε 50 σκηνές των 4 ατόμων και 6 ατόμων. Αν όλες οι σκηνές είναι γεμάτες, να βρείτε πόσες είναι οι σκηνές των 4 ατόμων και 6 ατόμων;

19) Ο κερματοδέκτης ενός μηχανήματος πώλησης αναψυκτικών δέχεται κέρματα του ενός ευρώ και δύο ευρώ. Όταν ανοίχτηκε, διαπιστώθηκε ότι περιείχε 80 κέρματα συνολικής αξίας 95 ευρώ. Πόσα κέρματα από κάθε είδος υπήρχαν;

20) Ο Γιώργος θα κεράσει σοκολάτες τους συμμαθητές του για τα γενέθλια του. Αγόρασε δύο είδη σοκολάτες. Το Α είδος κοστίζει €2 η μία και το Β είδος €4 η μία. Ο Γιώργος αγόρασε από το Α είδος 7 σοκολάτες περισσότερες από το Β είδος. Αν πλήρωσε συνολικά €62 πόσες σοκολάτες αγόρασε από το κάθε είδος;